

УДК 519.718.2

DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.3.2/21>**Григор'єва Т.І.**

Міжнародний гуманітарний університет

Розенвассер Д.М.

Міжнародний гуманітарний університет

Хнюнін С.Г.

Міжнародний гуманітарний університет

Крохмаль М.В.

Міжнародний гуманітарний університет

АНАЛІЗ СКЛАДНИХ СИСТЕМ ЩОДО МАШИННОГО НАВЧАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕНЗОРНИХ МЕТОДІВ

У статті розглянуто застосування тензорних методів для аналізу складних систем у контексті машинного навчання. З огляду на зростаючий обсяг багатовимірних та слабо структурованих даних, що характерні для сучасних прикладних задач, виникає нагальна потреба у використанні потужних інструментів, здатних ефективно обробляти інформацію з високою розмірністю, зберігаючи внутрішню структуру даних. Одним із таких інструментів є тензорний аналіз, який уможливорює формалізацію, декомпозицію, оптимізацію та інтерпретацію складних взаємозв'язків між змінними.

В роботі розглядаються тензорні моделі складних систем. Показана можливість використання тензорів для представлення залежностей між компонентами системи в компактній і узагальненій формі. Тензорний підхід забезпечує інваріантність рівнянь під час перетворень координат. Використання тензорного формалізму для аналізу надійності складних систем відкриває можливості точнішого моделювання складних взаємодій і багатовимірних залежностей. Цей підхід відкриває перспективи для підвищення стійкості систем шляхом оптимізації на основі математичних методів, що ґрунтуються на тензорах.

В роботі наведено ключові тензорні підходи, які наразі активно впроваджуються в алгоритми машинного навчання. Зокрема, розглянуто методи тензорного розкладання та декомпозиція, які дозволяють зменшити розмірність даних, зберігаючи характеристики, що є особливо актуальним для задач класифікації, кластеризації та рекомендацій. Окрему увагу приділено тензорній факторизації, яка застосовується для побудови компактних моделей і виявлення прихованих закономірностей у багатовимірному просторі ознак. Також розглянуто використання тензорних операцій у глибокому навчанні – включаючи згорткові нейронні мережі, де тензорні представлення сприяють зниженню обчислювальної складності моделей без зменшення їх точності. Висвітлено роль тензорних методів оптимізації, таких як тензорне градієнтне спускання, у прискоренні навчання моделей шляхом врахування структурних особливостей параметричного простору.

У статті досліджено тензорні підходи до аналізу надійності складних систем, які дозволяють ефективно опрацьовувати багатовимірні та структурно складні дані. Особливу увагу приділено інтеграції тензорного аналізу з методами моделювання систем за допомогою випадкових процесів. Результати дослідження демонструють, що поєднання тензорного підходу та ймовірного моделювання дозволяє досягти високої точності у прогнозуванні відмов та зменшити обчислювальну складність задачі.

Отримані результати підтверджують, що тензорний аналіз є надзвичайно перспективним напрямом у розвитку машинного навчання. Його використання дозволяє не лише підвищити точність моделей, а й суттєво знизити їх складність, що є критично важливим у прикладних сценаріях з обмеженими ресурсами. Запропоновані підходи можуть бути застосовані в широкому спектрі задач – від комп'ютерного зору до прогнозування поведінки складних систем у реальному часі.

Ключові слова: складні системи, надійність складних систем, математичне моделювання складних систем, тензорні моделі складних систем, випадкові процеси, оптимізація, машинне навчання, тензорна факторизація, методи тензорного розкладання, тензорна декомпозиція.

Постановка проблеми. У сучасних умовах стрімкого зростання обсягів і складності даних, що виникають у процесах проєктування, аналізу та експлуатації складних систем, виникає необхідність у використанні більш ефективних інструментів математичного моделювання та обробки інформації. Традиційні методи лінійної алгебри та класичної статистики виявляються обмеженими у здатності враховувати багатовимірну структуру даних, складні нелінійні залежності між компонентами системи, а також часову динаміку процесів, що відбуваються в реальному часі.

Одним з перспективних напрямків вирішення цих проблем є застосування тензорних методів, які надають можливість компактного й інформативного представлення багатовимірних даних у вигляді тензорів – багатовимірних масивів, що розширюють поняття матриць. Ці методи особливо ефективні в поєднанні з алгоритмами машинного навчання, де необхідно аналізувати дані з високою розмірністю та складною внутрішньою структурою.

Таким чином, постає наукова проблема розробки та впровадження узагальненого підходу до аналізу складних систем, який би об'єднував тензорні методи, машинне навчання та ймовірнісно-статистичне моделювання. Це дозволить не лише ефективно аналізувати наявні дані, а й здійснювати передбачення поведінки системи у змінних умовах експлуатації, що є особливо важливим для систем критичного призначення: в оборонній, медичній, транспортній та енергетичній галузях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз надійності складних систем за допомогою тензорних методів і випадкових процесів є відносно новим, але швидко зростаючим напрямом досліджень у галузі прикладної математики, обчислювальної інженерії та машинного навчання. Із зростанням складності сучасних систем виникла потреба у більш гнучких і потужних засобах моделювання багатовимірних процесів, що враховують часову, просторову та функціональну взаємозалежність змінних. В [1] були запропоновані фундаментальні підходи до розкладання тензорів і продемонстровано їхню ефективність у задачах зменшення розмірності та виділення структур у багатовимірних даних. Подальші дослідження зосереджувалися на адаптації цих методів до реальних систем з часовими залежностями та стохастичною природою. Наприклад, в [2, 3] розглядаються тен-

зорні мережі, які ефективно використовуються для представлення динамічних даних. У галузі теорії надійності важливими є роботи, які поєднують стохастичні моделі з тензорними уявленнями. В [4] досліджуються випадкові процеси, представлені у тензорному вигляді, що значно зменшує обчислювальну складність при збереженні точності. Однак, попри стрімкий розвиток напряму, питання інтеграції тензорного формалізму з теорією випадкових процесів для моделювання надійності ще недостатньо систематизоване. Необхідне подальше вдосконалення моделей, здатних враховувати як структурну складність систем, так і динаміку в умовах стохастичної невизначеності. Це створює підґрунтя для подальших досліджень, зокрема в напрямку розробки тензорно-стохастичних моделей.

Постановка завдання. Метою статті є дослідження ефективності та доцільності використання тензорних методів для аналізу складних систем у контексті машинного навчання, а також обґрунтування переваг тензорного підходу для обробки багатовимірних, структурованих і неструктурованих даних. У роботі ставиться завдання узагальнити існуючі методи тензорного аналізу, адаптувати їх до потреб сучасних задач машинного навчання, та запропонувати підходи до оптимізації моделей з урахуванням високої розмірності вхідного простору.

Виклад основного матеріалу. Методи тензорного аналізу в машинному навчанні. Тензорний аналіз є потужним математичним інструментом, який відіграє важливу роль у сучасному машинному навчанні. Він дозволяє ефективно працювати з багатовимірними даними, моделювати складні залежності та оптимізувати обчислювальні процеси. Застосування тензорних методів у машинному навчанні охоплює широкий спектр задач, включаючи глибоке навчання, розпізнавання зображень, обробку природної мови та розв'язання задач оптимізації.

Одним із ключових аспектів використання тензорного аналізу є представлення даних у тензорному вигляді. Наприклад, у глибоких нейронних мережах ваги та активації нейронів можуть бути зображені у вигляді багатовимірних масивів, що спрощує операції над ними. Тензорні обчислення широко використовуються у фреймворках машинного навчання, що дозволяє значно прискорити виконання моделей.

Тензорна факторизація [5] використовується для автоматизованого виявлення значущих ознак у високорозмірних даних. Факторизація тензора,

тобто представлення тензора у вигляді добутку компонентів нижчої розмірності, дає змогу зменшити обчислювальну складність та виявити приховані залежності. Тензорна факторизація дозволяє виявити як лінійні, так і нелінійні залежності між змінними. Це корисно у таких завданнях, як кластеризація, побудова рекомендованих систем, обробка мовлення, біоінформатика, та медична діагностика.

Важливою категорією є тензорні обчислення в глибокому навчанні. Нейронні мережі за своєю природою працюють із багатовимірними тензорами, а операції згортки, нормалізації та поширення градієнтів виконуються за допомогою тензорної алгебри. Операція декомпозиції сприяє зменшенню кількості параметрів та підвищенню ефективності моделей без втрати точності. Такий підхід підвищує узагальнювальну здатність мережі та пришвидшує її тренування.

Тензорні методи оптимізації також відіграють важливу роль у навчанні моделей. Тензорний градієнтний спуск [6] дозволяє знаходити глобальні мінімуми функцій втрат в умовах великої кількості параметрів і складних залежностей між ознаками. Його перевага – врахування структурованості параметричного простору, що значно зменшує обчислювальні витрати.

Ще одним важливим напрямком є тензорні представлення у обробці природної мови [7]. У цьому контексті тензорні моделі застосовуються для створення багатовимірних векторних уявлень слів, речень або навіть цілих документів. Наприклад, тензорне розкладання дозволяє аналізувати частотні та семантичні взаємозв'язки між словами у корпусі, формалізуючи їх у вигляді тривимірного тензора «слово – контекст – документ».

Окрім факторизації, у рамках тензорного аналізу активно застосовуються операції тензорної регуляризації, методи зменшення розмірності, а також класифікаційні моделі, що базуються на тензорних ядрах [8]. Зокрема, тензорні ядрові функції дозволяють адаптувати класичні алгоритми до багатовимірних структур, не втрачаючи інформації про їхню внутрішню будову.

Таким чином, тензорні методи стали фундаментальним інструментом у машинному навчанні для аналізу складних, багатовимірних і слабоструктурованих даних. Тензорні методи поєднують високу точність із компактністю моделей, що є критично важливим у реальних прикладних задачах, таких як медичні дослідження, обробка мовлення, моделювання соціальних мереж і рекомендаційні системи.

Подальші дослідження спрямовані на інтеграцію тензорних архітектур з байєсівськими підходами, розробку адаптивних розкладів та впровадження у квантові обчислення, що відкриває нові горизонти в теорії та практиці штучного інтелекту.

Аналіз надійності складних систем тензорними методами. Теорія надійності складних систем є важливою галуззю досліджень, що охоплює оцінку, моделювання та прогнозування відмов. Традиційні методи аналізу надійності, засновані на ймовірнісно-статистичних підходах, є доцільними для розгляду окремих компонентів, але стають менш ефективними при описі складних багатоконпонентних систем із тісними зв'язками між їх елементами. Тензорний аналіз, що розглядає багатовимірні залежності, пропонує більш гнучкий та універсальний математичний апарат для моделювання та оцінки надійності систем.

Розглянемо систему S , яка описується як сукупність n -вимірного простору компонентів. Надійність системи представимо у вигляді тензорного рівняння:

$$R_{i_1 i_2 \dots i_n} = P(T > t | X),$$

де $R_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – тензор надійності, який визначає ймовірність безвідмовної роботи окремих компонентів за умов часу $T > t$, а $X = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$ – вектор параметрів системи (наприклад, напруга, температура, інтенсивність навантаження). Індeksi $i_1, i_2, \dots, i_n$ відповідають станам окремих компонентів системи.

Для складних систем із взаємозалежними компонентами пропонується застосовувати тензор кореляційних коефіцієнтів, який враховує зв'язки між станами компонентів. Тензор кореляцій можна визначити як:

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\text{Cov}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})}{\sqrt{\prod_{k=1}^n \text{Var}(X_{i_k})}},$$

де $\text{Cov}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$ – тензор коваріацій, а $\text{Var}(X_{i_k})$ – дисперсія змінної X_{i_k} .

Для опису надійності складених систем розглянемо тензор $\Phi_{i_1 i_2 \dots i_n}$, що визначає залежність загальної надійності системи від станів її компонентів. Наприклад, для послідовної системи ця залежність може бути записана як:

$$\Phi_{i_1 i_2 \dots i_n} = \prod_{k=1}^n R_{i_k}.$$

Для паралельної системи:

$$\Phi_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - R_{i_k}).$$

Для визначення інтенсивності відмов будемо використовувати тензор відмов $\lambda_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Побудуємо тензорну модель динаміки змін надійності у часі за допомогою диференціальних рівнянь з використанням коваріантного диференціювання:

$$\frac{DR_{i_1 i_2 \dots i_n}}{Dt} = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_n} R_{i_1 i_2 \dots i_n},$$

де $\frac{D}{Dt}$ – оператор коваріантного диференціювання, що враховує зміни стану системи у криволінійному просторі, заданому умовами експлуатації.

Таким чином, використання тензорного аналізу в теорії надійності дозволяє моделювати складні багатовимірні системи, враховувати взаємозв'язки між компонентами та змінність параметрів у часі. Такий підхід забезпечує глибший аналіз властивостей систем, оптимізацію їхньої роботи та передбачення можливих відмов. Тензорний підхід також відкриває нові можливості для розробки інженерних систем із заданими характеристиками надійності в умовах складних експлуатаційних середовищ.

Моделювання систем за допомогою випадкових процесів тензорними методами. Математичне моделювання систем за допомогою випадкових процесів є важливим підходом для аналізу складних явищ, що відбуваються в умовах невизначеності. Інтеграція випадкових процесів із тензорним аналізом дає можливість описувати взаємозв'язки між компонентами системи в багатовимірному просторі, враховуючи їхню стохастичну природу. Такий підхід відкриває нові можливості для прогнозування поведінки систем, оцінки ризиків і оптимізації їхньої роботи.

Розглянемо систему S , яка описується множиною параметрів, кожен з яких є випадковим процесом, що змінюється у часі $t \in [0, T]$. Позначимо тензор станів системи через $X(t) \in R^{n \times m}$, де n – кількість параметрів системи, а m – кількість вимірів або станів, у яких кожен параметр може перебувати. Кожен елемент $X_j^i(t)$ тензора $X(t)$ є випадковим процесом.

Побудуємо тензорну модель динаміки системи у стохастичному середовищі за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь у тензорному вигляді:

$$dX_j^i(t) = A_j^i(X, t)dt + B_j^i(X, t)dW_j^i(t),$$

де $A_j^i(X, t)$ – тензор визначених (детермінованих) складових зміни стану системи, $B_j^i(X, t)$ – тензор стохастичних впливів, $W_j^i(t)$ – процес Вінера, який моделює випадкові впливи.

Через $F(X, t, \Delta t)$ позначимо тензор розподілу ймовірностей станів системи. Тоді для прогнозування поведінки системи будемо використовувати тензор ймовірності:

$$P_{ij}(X(t + \Delta t) | X(t)) = \frac{\partial^2 F(X, t, \Delta t)}{\partial X^i \partial X^j}.$$

Застосування тензорного аналізу до моделювання систем за допомогою випадкових процесів є важливим інструментом для вирішення задач у таких галузях, як економіка, біологія, фізика, інженерія та машинне навчання. Це забезпечує більш глибоке розуміння динаміки систем, підвищує точність прогнозування і дозволяє оптимізувати управління процесами в умовах невизначеності. Розробка таких моделей відкриває перспективи для створення більш ефективних і стабільних систем у реальному світі. Тензорна форма представлення випадкових процесів дозволяє не лише компактно описувати математичні моделі, але й забезпечує інваріантність рівнянь при зміні координат. Це особливо важливо для аналізу систем, що функціонують у різноманітних середовищах або під впливом багатовимірних зовнішніх факторів.

Таким чином, тензорний аналіз надає потужний математичний інструментарій для моделювання складних систем через вивчення їх багатовимірних взаємозв'язків.

Висновки. В статті розглянуто застосування тензорних методів для моделювання та оптимізації складних систем у машинному навчанні. Показано, що тензорний підхід, зокрема тензорні розклади, факторизація, тензорні ядрові методи та регуляризація, дозволяє зберегти структурну цілісність багатовимірних даних, зменшити розмірність простору ознак і, водночас, підвищити ефективність моделей. Використання тензорних обчислень у глибокому навчанні дозволяє зменшити кількість параметрів у нейронних мережах, оптимізувати обчислювальні ресурси та забезпечити кращу здатність до узагальнення. Отже, тензорний аналіз постає не лише як потужний математичний інструмент, а й як методологічна основа для побудови більш точних і масштабованих моделей машинного навчання, особливо в умовах великої кількості ознак і складних внутрішніх зв'язків між ними.

У контексті стрімкого розвитку штучного інтелекту та машинного навчання тензорні методи набули особливої актуальності завдяки своїй здатності ефективно моделювати багатовимірні дані, що притаманні складним системам.

Складні системи характеризуються високою розмірністю, гетерогенністю, наявністю латентних структур та сильними кореляціями між компонентами. Традиційні матричні підходи виявляються обмеженими при роботі з такими даними, тоді як тензори – багатовимірні узагальнення матриць – забезпечують природну структуру для зберігання і обробки інформації з кількома аспектами (час, простір, категорія, джерело тощо).

У даному дослідженні розглянуто застосування тензорних методів для аналізу надійності складних систем, зокрема у поєднанні з підходами стохастичного моделювання. Встановлено, що використання тензорного апарату дозволяє ефективно представляти багатовимірні залежності між елементами складної системи, зокрема у випадках, коли ці елементи піддаються випадковим впливам з часом. Тензорні моделі забезпечують природний спосіб представлення стохастичних процесів у вигляді багатовимірних масивів, що змінюються за часовими або структурними координатами, зберігаючи при цьому взаємозв'язки між компонентами системи. Було показано, що стохастичні процеси, описані тензорними структурами, дозволяють враховувати часові й структурні залежності у багатокомпонентних системах, що є неможливим у рамках класичних матричних

моделей. Таким чином, поєднання тензорного аналізу з методами випадкових процесів створює нову якісну платформу для аналізу та прогнозування надійності складних систем, забезпечуючи гнучкість, масштабованість та високу інтерпретованість результатів.

Отже, тензорний підхід надає унікальні інструменти для аналізу складних систем у машинному навчанні. Його головні переваги – здатність працювати з високорозмірними даними без втрати структури, виявлення закономірностей. Подальші дослідження орієнтовані на розробку адаптивних тензорних архітектур, що поєднують автоматичне навчання структури тензора та інтеграцію з байєсівськими моделями для підвищення надійності.

Тензорні методи машинного навчання дозволяють розширити можливості обробки складних багатовимірних даних, покращити продуктивність моделей та спростити їхню інтерпретацію. Завдяки своїм математичним властивостям тензори забезпечують ефективне використання ресурсів і глибокий аналіз даних, що робить їх незамінним інструментом у сучасних алгоритмах штучного інтелекту. Подальше дослідження та вдосконалення тензорних методів відкриває нові перспективи для машинного навчання та оптимізації складних систем.

Список літератури:

1. Tamara G. Kolda, Brett W. Bader. Tensor Decompositions and Applications / Siam Review 2009. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 51, No. 3. P. 455–500.
2. Stoudenmire E.M., David J. Schwab. Supervised Learning with Tensor Networks / 30th Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2016), Barcelona, Spain.
3. Glen Evenbly, A Practical Guide to the Numerical Implementation of Tensor Networks I: Contractions, Decompositions and Gauge Freedom. Front. Appl. Math. Stat., 01 June 2022. Sec. Mathematics of Computation and Data Science. Volume 8 – 2022. <https://doi.org/10.3389/fams.2022.806549>
4. B. Staber and J. Guilleminot, Stochastic modeling and generation of random fields of elasticity tensors: A unified information-theoretic approach, C. R. Mécanique 345 (2017). P. 399–416. DOI: 10.1016/j.crme.2017.05.001
5. Nickel, M., Tresp, V. (2013). Tensor Factorization for Multi-relational Learning. In: Blockeel, H., Kersting, K., Nijssen, S., Železný, F. (eds) Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. ECML PKDD 2013. Lecture Notes in Computer Science, vol 8190. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-40994-3_40
6. Yifan Zhao, Hashim Sharif, Vikram Adve, Sasa Misailovic, Felix: Optimizing Tensor Programs with Gradient Descent / April 2024. Conference: ASPLOS '24: 29th ACM International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems, Volume 3, 2024. <https://doi.org/10.1145/3620666.3651348>
7. Vajjala S., Majumder B., Gupta, A., Surana, H. (2020), Practical Natural Language Processing: A Comprehensive Guide to Building Real-world NLP Systems, O'Reilly Media.
8. Pei-Chang Guo, New regularization methods for convolutional kernel tensors / September 2023. AIMS Mathematics 8 (11):26188-26198 DOI:10.3934/math.20231335

Hryhorieva T.I., Rozenvasser D.M., Khniunin S.H., Krokhmal M.V. ANALYSIS OF COMPLEX SYSTEMS WITH MACHINE LEARNING USING TENSOR METHODS

The article discusses the application of tensor methods for the analysis of complex systems in the context of machine learning. Given the growing volume of multidimensional and poorly structured data that is characteristic of modern applied problems, there is an urgent need to use powerful tools that can effectively process high-dimensional information while preserving the internal structure of the data. One such tool is tensor analysis, which allows for the formalization, decomposition, optimization, and interpretation of complex relationships between variables.

The paper considers tensor models of complex systems. The possibility of using tensors to represent dependencies between system components in a compact and generalized form is shown. The tensor approach ensures the invariance of equations during coordinate transformations. The use of tensor formalism for analyzing the reliability of complex systems provides the possibility of more accurate modeling of complex interactions and multidimensional dependencies. This approach opens up prospects for increasing the stability of systems through optimization based on mathematical methods based on tensors.

The paper presents key tensor approaches that are currently being actively implemented in machine learning algorithms. In particular, the methods of tensor decomposition and decomposition are considered, which allow reducing the dimensionality of data while preserving characteristics, which is especially relevant for classification, clustering, and recommendation tasks. Special attention is paid to tensor factorization, which is used to build compact models and detect hidden patterns in a multidimensional feature space. The use of tensor operations in deep learning is also considered – including convolutional neural networks, where tensor representations help reduce the computational complexity of models without reducing their accuracy. The role of tensor optimization methods, such as tensor gradient descent, in accelerating model training by taking into account the structural features of the parameter space is highlighted.

The article investigates tensor approaches to the analysis of the reliability of complex systems, which allow for the effective processing of multidimensional and structurally complex data. Particular attention is paid to the integration of tensor analysis with methods for modeling systems using stochastic processes. The results of the study demonstrate that the combination of the tensor approach and probabilistic modeling allows achieving high accuracy in predicting failures and reducing the computational complexity of the problem.

The results obtained confirm that tensor analysis is an extremely promising direction in the development of machine learning. Its use allows not only to increase the accuracy of models, but also to significantly reduce their complexity, which is critically important in application scenarios with limited resources. The proposed approaches can be applied in a wide range of tasks – from computer vision to predicting the behavior of complex systems in real time.

Key words: complex systems, reliability of complex systems, mathematical modeling of complex systems, tensor models of complex systems, random processes, optimization, machine learning, tensor factorization, tensor decomposition methods, tensor decomposition.